Questa dispensa è stata realizzata durante il corso tramite appunti presi a lezione e seguendo l'ordine delle dispense date insieme a Wikipedia ho integrato delle parti.

Alla fine di molti argomenti ci sono degli esercizi svolti per preparare lo scritto.

Potrebbe esserci qualche errore che vi prego di segnalarmi e qualche commento semi-ironico qua e là...

Per qualsiasi cosa (anche info e consigli sulla materia o sul perché di questa scrittura)

Ecco i miei contatti:

fernandodenitto@gmail.com

@fernandodenitto

o su Facebook

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Buono Studio ed
IN BOCCA AL LUPO

Fernando De Nitto

4 Ottobre 2014

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

TEORIA DEGLI ERRORI

Sia β un intero con $\beta \neq 1$ detto BASE (DI RAPPRESENTAZ)

Qualsiasi numero $x \in \mathbb{R} / \{0\}$ ammette una

RAPPRESENTAZIONE IN BASE β così definita

$$x = \text{sign}(x) \cdot \beta^b \sum_{i=1}^{m} a_i \beta^{-i}$$

dove $b \in \mathbb{Z}$ è l'esponente e $\text{sign}(x) \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

$a_i \in \mathbb{N}$ e $0 \leq a_i < \beta$

Si dicono CIFRE DELLA RAPPRESENTAZIONE DI UN NUMERO IN BASE β

In $\beta = 10$ 0.1 si può scrivere come $\begin{cases} 0.01 \times 10^1 \\ 1.0 \times 10^{-1} \end{cases}$

Voglio una RAPPRESENTAZIONE UNICA, quindi uso questo

(Th) DI UNICITÀ DELLA RAPPRESENTAZIONE

Sia data una base $\beta > 1$ ed un $x \in \mathbb{R} / \{0\}$ esiste un UNICA RAPPRESENTAZIONE tale che:

Hp ① $a_1 \neq 0$
② $\nexists k : \forall i > k \quad a_i = \beta - 1$

$\Rightarrow$ TESI: La rappresentazione di x in base β è UNICA!

Cioè, se la PRIMA CIFRA DELLA MANTISSA È $\neq 0$ e non esistono cifre che da un certo punto in poi sono tutte $\beta - 1$ allora la rappresentazione di x è UNICA!

La ② sorge dal problema della FRAZIONE GENERATRICE

es. $1,2\overline{9}$ ha come frazione generatrice $\frac{129-12}{90}$

è anche la frazione generatrice di $1,3$ quindi non si ha rappresentazione unica!

RAPPRESENTAZIONE DEL (Th) PRECEDENTE si dice RAPP. IN VIRGOLA MOBILE NORMALIZZATA!

es. $\beta = 10$ $\quad 0.168 \times 10^4$ (b)

$a_1 \beta^{-1} \cdots$ $\quad \beta$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \beta^{-i}$ è detta MANTISSA (numero dopo la virgola)

Si dimostra che $\frac{1}{\beta} \leq \sum_{i=1}^{m} a_i \beta^{-i} < 1$

DIMOSTRO:

Il minimo numero è quello che ottengo se pongo $a_1 = 1$ (non può essere 0 per il teorema) e $a_i = 0$ per $i > 1$.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \beta^{-i} = a_1 \beta^{-1} + \sum_{i=2}^{m} a_i \beta^{-i} = \beta^{-1} + \sum 0 = \frac{1}{\beta}$$

Il max numero è quello che ottengo se $a_i = \beta - 1 \ \forall i$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \beta^{-i} = \sum_{i=1}^{m} (\beta-1)\beta^{-i} = (\beta-1) \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{1}{\beta}\right)^i}_{\text{SERIE GEOMETRICA}} = (\beta-1)\frac{1}{\beta} \cdot \frac{\beta}{(\beta-1)} = 1$$

ATTENZIONE:
m parte da zero quindi mettiamo in evidenza $1/\beta$

SERIE GEOMETRICA con RAGIONE compresa tra -1 e 1

$$\sum_{i=0}^{m} x^m \to \frac{1}{1-x} \qquad -1 < x < 1$$

Dato che per il (th) di unicità non possono esserci tante (o tutte) le cifre $= \beta - 1$ da un certo punto in poi, quello è un sup e non un max $\Rightarrow$ estremo escluso!

I CALCOLATORI possono rappresentare solo un certo NUMERO FINITO DI CIFRE (m) della mantissa

quindi in realtà la MANTISSA sarà $\sum_{i=1}^{m} a_i \beta^{-i}$

Per questo il calcolatore ha 2 TIPI DI APPROSSIMAZIONI PER LA RAPPRESENTAZIONE DI x

① TRONCAMENTO: tronca il numero dopo la cifra m-esima

$$x = \text{sign}(x)\, \beta^b \cdot \sum_{i=1}^{m} a_i \beta^{-i} = \text{(tr}(x)\text{)}$$

② ARROTONDAMENTO

NON DIMENTICARE

$$\text{rd}(x) \begin{cases} \text{tr}(x) & 0 \leq a_{m+1} < \beta/2 \\ \text{sign}(x) \cdot \beta^b \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} a_i \beta^{-i} + \beta^{-m}\right) & \beta/2 \leq a_{m+1} < \beta \end{cases}$$

Cioè (se) la (m+1)-esima cifra è $< \beta/2$ si comporta come un troncamento (altrimenti) aumenta di un'unità la m-esima cifra e poi tronca.

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

CASO PARTICOLARE: Se $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_m = \beta - 1$ e $a_{m+1} \geq \beta/2$
l'arrotondamento porta ad aumentare di un'unità l'esponente b.

es. $\beta = 10$ $m = 3$ $x = 0.9997 \times 10^5$.
(a_{m+1} cifra $> \beta/2$)

$\Rightarrow x = 1.000 \times 10^5$ ma per la (1)
devo scriverlo come $x = 0.\underbrace{100}_{m=3} \times 10^6$

Questo non sempre è possibile e potrebbe generare situazioni di OVERFLOW ad esempio se il max esponente consentito fosse stato 5.

Si può dimostrare che gli ERRORI DELLE APPROSSIMAZIONI $tr(x)$ e $rd(x)$:

sono $|tr(x) - x| < \beta^{b-m}$ $|rd(x) - x| \leq \frac{1}{2}\beta^{b-m}$ UGUALE

quindi $rd(x)$ è una MIGLIORE APPROSSIMAZIONE per x

NUMERI DI MACCHINA & CARDINALITÀ

Indico con (M) l'insieme dei numeri (F) rappresentabili all'interno del calcolatore. → NUMERI DI MACCHINA

M è un insieme FINITO e anche di calcolarne la CARDINALITÀ cioè il numero dei suoi elementi

Fissati β, m e supponi che $L \leq b \leq U$
(estremi esponente)

$a_1 \neq 0$ quindi $1 \leq a_1 \leq \beta - 1$, supponiamo $\beta - 1$

Si avrà che le CIFRE $(\beta - 1)(\beta^{m-1}) \cdot 2$ (possono essere sia positive che negative)

gli esponenti possono essere $(U - L + 1)$

e poi c'è il numero 0 (esponente 0)

Si avrà che $\text{card}(M) = 2(\beta^m - \beta^{m-1})(U - L + 1) + 1$

L'insieme M viene indicato (all'interno di un calcolatore) come segue:

$$F(\beta, m, L, U)$$

Se avessi $F(10, 3, -99, 99)$ per trovare $\text{card}(M)$ basta sostituire nella formula.

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745